ESTRUCTURAS SEMITOPOLÓGICAS: CONSTRUCCIONES Y EJEMPLOS

Wilson Forero y Reinaldo Montañez
Universidad Nacional
wilsonforerob@gmail.com, jrmontanezp@unal.edu.co

Los funtores topológicos surgen del estudio del funtor de olvido, de la categoría de los espacios topológicos a la categoría de los conjuntos. Una forma de generar nuevas categorías topológicas a partir de las ya existentes es a través de endofuntores, en la categoría de los denominados elevadores y coelevadores de estructura, cuyos puntos fijos constituyen una categoría topológica. Al debilitar la noción de funtor topológico surgen los funtores semitopológicos; estos permiten estudiar una mayor variedad de categorías. Surge la inquietud de formar categorías semitopológicas a partir de las ya conocidas. Un posible camino es a partir de subcategorías reflexivas.

FUNTORES TOPOLÓGICOS

Al considerar una fuente unitaria $f: X \to Y$, donde Y es el conjunto subyacente del espacio topológico (Y, τ), nos preguntamos por la menor topología sobre X que hace que f sea continua. En tal caso, se determina el conjunto $S = \{f^{-1}(A) \mid A \text{ es abierto de } Y\}$, donde S es una topología sobre X y es la solución al problema planteado, y se conoce como la *topología inicial* sobre X inducida por la función f. Esta construcción nos indica que dada una fuente unitaria estructurada en la categoría de los conjuntos, es posible levantarla a la categoría de los espacios topológicos.

Ahora, si deseamos estudiar los levantamientos de fuentes entre dos categorías, como ocurre entre los conjuntos y los espacios topológicos, surge la inquietud de estudiar funtores $F: A \to B$ para los cuales dada una fuente estructurada (X, f_i) en B con $f_i: X \to Y_i$, exista una fuente (X, f_i) en A tal que $F(f_i) = f_i$. Es por ello que en Adámek, Herrlich y Strecker (2004) se busca contestar esta duda por medio del siguiente concepto.

Definición 1. Un funtor $F: A \to B$ es *topológico* si para toda fuente (X, f_i') en B existe un único levantamiento $(\overline{X}, f_i)$. En tal caso, se dice que A es una *categoría topológica fibrada* sobre B.

Forero, W. y Montañez, R. (2017). Estructuras semitopológicas: construcciones y ejemplos. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 113-117). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Elevadores y coelevadores de estructura

Dado un funtor topológico es natural buscar funtores asociados a este que preserven las características propias de levantamientos de fuentes y sumideros. Esto fue estudiado por Reinaldo Montañez en su tesis doctoral (Ruiz y Montañez, 2006), por medio de elevadores y coelevadores de estructura.

*Definición 2***.** Sea $F: A \to B$ un funtor topológico. Se dirá que un funtor $E: A \to A$ es un *elevador de estructura* si:

1. $F \circ E = F$ (i. e., E es un funtor concreto)

2. $X \leq E(X)$, para todo $X \in Ob(A)$.

Se dirá que $X \leq E(X)$ si existe un morfismo $f: E(X) \to X$ tal que $Ff = id_{FX}$. En la definición anterior, si se invierte la desigualdad $X \leq E(X)$, se tendrá el concepto de *coelevador*, esto es $C: A \to A$ es un coelevador de estructura, si C es concreto y $C(X) \leq X$ para todo $X \in Ob(A)$.

Con los conceptos anteriores es posible formar nuevas categorías topológicas por medio de la categoría $E(A)$ formada por los puntos fijos de elevadores o $C(A)$ respecto a los coelevadores, es decir:

*Teorema 1***.** Sea $F: A \to B$ un funtor topológico y $E: A \to A$ un funtor concreto e idempotente. Entonces $E(A)$ es una categoría topológica.

Lo anterior adaptado a elevadores y coelevadores genera el siguiente resultado:

*Corolario 1***.** Sea $F: A \to B$ un funtor topológico y $E: A \to A$ un elevador (coelevador) idempotente. Entonces $E(A)$ es una categoría topológica.

CATEGORÍAS SEMITOPOLÓGICAS

Al debilitar las nociones de levantamientos surgen los funtores topológicamente algebraicos, los cuales exigen que las fuentes tengan factorizaciones del tipo generador, fuente inicial, permitiendo así que categorías como las de los espacios de Hausdorff, los grupos, los espacios vectoriales, por mencionar algunas, cumplan este tipo de factorizaciones con respecto al funtor de olvido en la categoría de los conjuntos. Ahora, esta noción no se comporta bien respecto a la composición usual de funtores; es decir, si se componen dos funtores topológicamente algebraicos no necesaria-mente esta composición da un funtor topológicamente algebraico. Ejemplos del fenómeno anterior se pueden encontrar en Adámek, Herrlich y Strecker (2004) y Tholen (1979).

Debido al problema de la cerradura bajo la composición usual de los funtores topológicamente algebraicos, en Tholen (1979) se definen soluciones semifinales para sumideros estructurados, las cuales son una noción debilitada de las factorizaciones (Generador, Fuente inicial).

Definición 3. Sea $F: A \to B$ funtor y (X, f_i) un sumidero estructurado, con $f_i: FA_i \to X$. La pareja (A, g), donde $g: X \to FA$, se dirá *solución semifinal* si satisface:

1. $g \circ f_i = Fh_i$ con $h_i: A_i \to A$.

2. Si existe (A', g') y $h_i': A_i \to A'$ tal que $g' \circ f_i = Fh_i$, entonces existe $w: A \to A'$ que satisface $Fw \circ g = g'$ y $w \circ h_i = h_i'$.

Si lo anterior se tiene para cada sumidero estructurado, se dirá que $F: A \to B$ es un *funtor semitopológico* y que A es una *categoría semitopológica* relativa a B. La importancia de los funtores semitopológicos radica en la búsqueda de la cerradura bajo la composición usual de funtores, por lo cual se visualiza con naturalidad el siguiente hecho (Adámek, Herrlich y Strecker, 2004):

Teorema 2. Si F, G son funtores semitopológicos, entonces $F \circ G$ es semitopológico.

SEMICOELEVADORES DE ESTRUCTURA

*Definición 4***.** Sea $F: A \to B$ un funtor semitopológico y $SC: A \to A$ un funtor, se dirá que *SC* es un *semicoelevador de estructura* si para todo objeto X de A existe un morfismo $g_x: X \to SC(X)$ en A tal que los morfismos Fg_x formen una transformación natural entre los funtores F y $F \circ SC$.

Un ejemplo del concepto anterior son los coelevadores de estructura, debido a que en tal caso las g_x son identidades y $Fg_x = id_{FX}$, y se entenderá por *semielevador de estructura* a un funtor $SE: A \to A$ tal que para cada X en A existe $f_x: SE(X) \to X$ en A tal que las Ff_x formen una transformación natural.

Debido a que los semicoelevadores de estructura generalizan el concepto de coelevación para funtores semitopológicos es pertinente preguntarse en qué condiciones la categoría $SC(A)$ formada por los puntos fijos de SC es semitopológica, lo cual motivó el siguiente enunciado:

Teorema 3. Sea $F: A \to B$ un funtor semitopológico y $SC: A \to A$ un semicoelevador de estructura idempotente, entonces $SC(A)$ es una categoría semitopológica relativa a B.

Demostración: Sean $A_i \in \mathrm{Obj}(SC(A))$ y $f_i : FA_i \to X$. Como F es semitopológico, el sumidero (f_i, X) posee solución semifinal (g, A) en A. Con esto presente se construirá la solución semifinal en $SC(A)$. Debido a que SC es un semicoelevador, existe un morfismo $h: A \to SC(A)$; como SC es idempotente, $SC(A) \in \mathrm{Obj}\,(SC(A))$. Con $h_i = g_i \circ h$, probaremos que $(h \circ g, SC(A))$ es la solución semifinal en $SC(A)$ del sumidero (f_i, X). Para ello, supongamos que existe $C \in \mathrm{Obj}\,(SC(A))$ tal que existen $l: X \to FC$ y $l_i: A_i \to C$ tal que $Fl_I = l \circ f_i$. Como A es solución semifinal de (f_i, X), existe un morfismo de $w: A \to C$ que satisface $l = w \circ g$ y $l_i = w \circ h_i$. Al aplicar SC a w, se tiene que $SC(w): SC(A) \to SC(C)$. Como C es punto fijo, esto implica que $SC(w): SC(A) \to C$. Aplicando F se tiene que el diagrama de la Figura 1 conmuta.

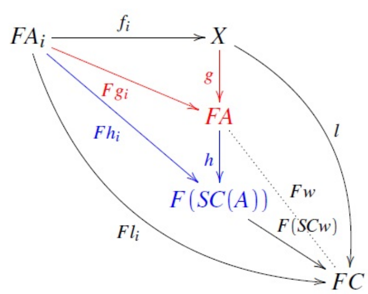

Figura 1. Semicoelevadores de estructura

Por lo tanto, $(h \circ g, SC(A))$ es la solución semifinal en $SC(A)$ del sumidero (f_i, X) esto implica que $F: SC(A) \to B$ es semitopológico y $SC(A)$ es una categoría semitopológica.

Es interesante que las subcategorías reflexivas son un ejemplo de semicoelevadores de estructura. Para entender esto, sea C subcategoría reflexiva de A. Ella induce un funtor $R_{\boldsymbol{C}}: C \to A$ tal que a todo objeto A en A le asigna su reflexión C_A en C; $R_{\boldsymbol{C}}$ es idempotente. Además, por ser una subcategoría reflexiva C, existe un morfismo $g: A \to C_A$ lo cual conduce a que si existe un funtor semitopológico $F: A \rightarrow B$, el funtor R_C es un semicoelevador de estructura, pleno e idempotente, cuyos puntos fijos corresponden a la subcategoría C, por lo que al adaptar el Teorema 3 a lo anterior se tiene el siguiente resultado:

Corolario 1. Sea $F: A \rightarrow B$ un funtor semitopológico y C una subcategoría reflexiva de A. Entonces C es una categoría semitopológica relativa a B.

Este corolario nos indica cómo formar nuevas categorías semitopológicas a partir de las ya conocidas. A continuación veamos algunos ejemplos.

Ejemplos

Sea Ab la categoría de grupos abelianos, la cual es subcategoría de la categoría de grupos Grp. Se verá que es reflexiva. Sean $(G,*)$ un grupo y G' el *grupo* generado por el conjunto $\{ab\, a^{-1}b^{-1}/a,b \in G\}$. G' es un subgrupo normal de $(G,*)$, y el cociente $(G/\,G',*)$ resulta un grupo abeliano. Ahora bien, el homomorfismo canónico $q_G: (G,*) \rightarrow (G/\,G'$ es el morfismo reflexión. En el caso de que existan $(H\,,\triangle)$ en Ab y $h: (G,*) \rightarrow (H\,,\triangle)$ un homomorfismo, existe de manera natural el homomorfismo $h: (G\,/\,G',*) \rightarrow (H\,,\triangle)$ definido por $h(\bar{g}) := h(g)$, tal que $h \circ q_G = h$. Por lo tanto Ab es una categoría semitopológica.

La categoría de los espacios topológicos que cumplen el primer axioma de separabilidad Top_{T_0} es una subcategoría de Top. Dado un espacio topológico (X, τ), se define la relación $a \sim b$ si y solo si $\overline{\{a\}} = \overline{\{b\}}$ (la clausura de $\{a\}$ es igual a clausura de $\{b\}$), esta relación es de equivalencia y genera el espacio $(X/\sim, \tau)$. Sea q_X la función canónica, $q_X: (X, \tau) \rightarrow (X/\sim, \tau)$. Al asignar al espacio $(X/\sim, \tau)$ la topología final asociada a dicha función, esta resulta continua. Esta construcción hace que Top_{T_0} sea una categoría reflexiva de Top con lo cual Top_{T_0} es una categoría semitopológica.

REFERENCIAS

Adámek, J., Herrlich, H. y Strecker, G. (2004). *Abstract and concrete categories. The joy of cats*. Disponible en: http://katmat.math.uni-bremen.de/acc/acc.pdf (primera edición en inglés, 1990).

Ruiz, C. y Montañez, R. (2006). *Elevadores de estructura*. *Boletín de Matemáticas*, XIII, 2, 111 -135.

Tholen, W. (1979). Semi-topological functors I. *Journal of Pure and Applied Algebra, 15*(1), 53-73.